Beispiel: Dreieck im $\mathbb{R}^n$

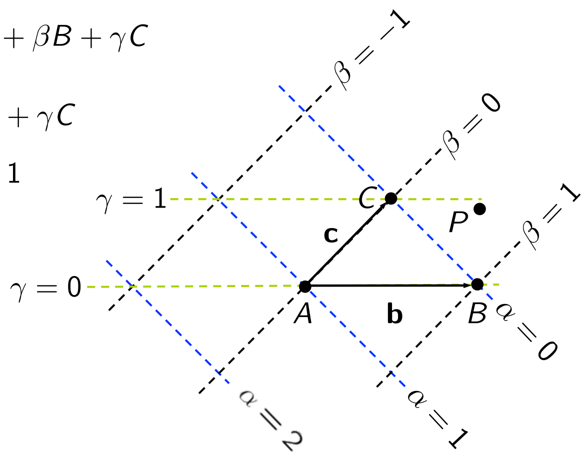
$$P = A + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$$

$$= A + \beta(B - A) + \gamma(C - A)$$

$$= \underbrace{(1 - \beta - \gamma)}\, A + \beta B + \gamma C$$

$$= \qquad \alpha A + \beta B + \gamma C$$

mit $\alpha + \beta + \gamma = 1$

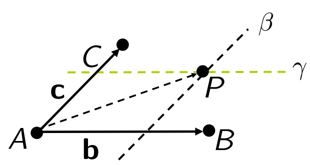


Häufige Aufgabe

- Bestimme die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes P bzgl. des Dreiecks A, B, C .
- Lösung 1:
  - $\beta(B - A) + \gamma(C - A) \stackrel{!}{=} P - A = q$
  - Löse das LGS

$$\begin{pmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$$

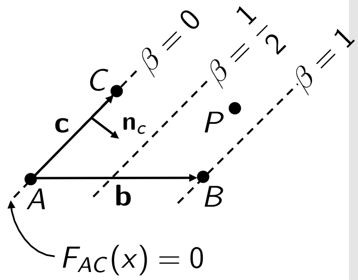
  - Setze $\alpha = 1 - \beta - \gamma$



- Lösung 2:
  - Verwende Beobachtung: alle Punkte P mit dem selben Abstand von der Geraden $\overline{AC}$ haben dieselbe baryzentrische Koordinate.
  - Setze $n_c := \begin{pmatrix} c_y \\ -c_x \end{pmatrix}$

$$F_{AC}(P) := \frac{n_c \cdot (P - A)}{n_c \cdot (B - A)}$$

Normierung

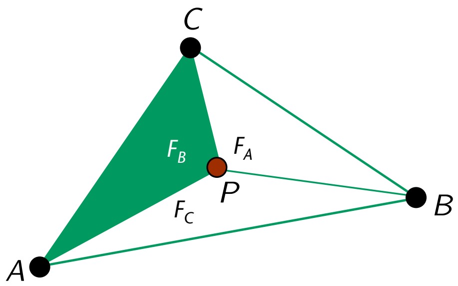


  - Damit ist $F_{AC}(A) = F_{AC}(C) = 0$,
    $F_{AC}(B) = 1$ (wegen Normierung)
  - Definiere analog F_{AB} und F_{BC}
  - Damit ist $\alpha = F_{BC}(P), \beta = F_{AC}(P), \gamma = F_{AB}(P)$

- Lösung 3:
  - Nutze den geometrischen Zusammenhang zwischen Flächeninhalten und baryzentrische Koordinaten:

$$\alpha = \frac{F_A}{F} \quad \beta = \frac{F_B}{F} \quad \gamma = \frac{F_C}{F}$$

$$F = F_A + F_B + F_C$$



Erinnerung

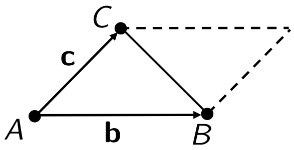
- Flächeninhalt eines Dreiecks A, B, C

$$\mathcal{F}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \| \mathbf{b} \times \mathbf{c} \|$$

$$= \frac{1}{2} \| (B - A) \times (C - A) \|$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} B_x - A_x & C_x - A_x \\ B_y - A_y & C_y - A_y \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

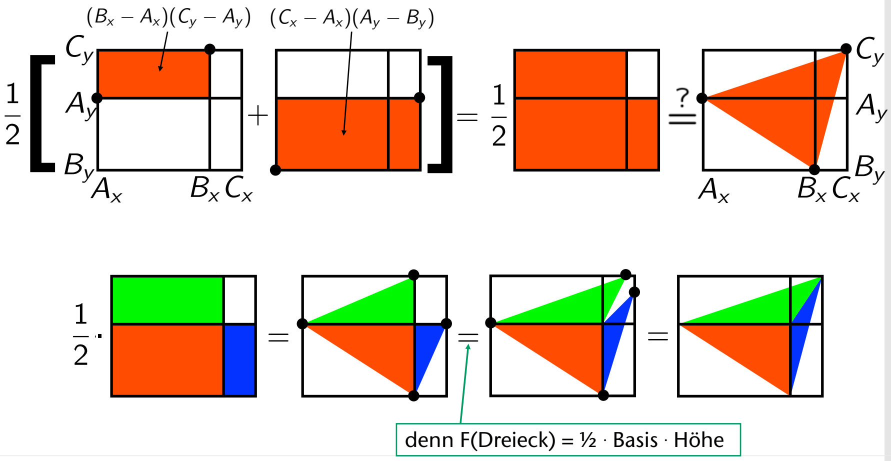


- Achtung: Achte auf den korrekten Umlaufsinn !!
- Beobachtung: Flächeninhalt = 0 ⇔ Det = 0 ⇔ Dreieck ist degeneriert ⇔ Punkte sind nicht affin unabhängig

Geometrischer Beweis der Flächenformel

- Zu zeigen:

$$\mathcal{F}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} [(B_x - A_x)(C_y - A_y) - (C_x - A_x)(B_y - A_y)]$$



Beweis der Lösung 3

- Sei A, B, C ein Dreieck, darin ein Dreieck P, Q, R
- Die baryzentrischen Koordinaten von P, Q, R bzgl. A, B, C seien

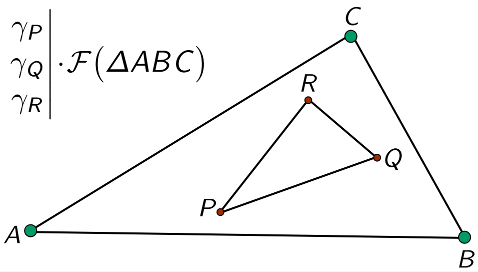
$$P : (\alpha_P, \beta_P, \gamma_P) \quad Q : (\alpha_Q, \beta_Q, \gamma_Q) \quad R : (\alpha_R, \beta_R, \gamma_R)$$

$d.h.$

$$P = \alpha_P A + \beta_P B + \gamma_P C$$

- Wir beweisen den etwas allgemeineren Satz:

$$\mathcal{F}(\Delta PQR) = \begin{vmatrix} \alpha_P & \beta_P & \gamma_P \\ \alpha_Q & \beta_Q & \gamma_Q \\ \alpha_R & \beta_R & \gamma_R \end{vmatrix} \cdot \mathcal{F}(\Delta ABC)$$



- Zur Erinnerung: Determinanten sind linear, d.h.

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ s\mathbf{a} + t\mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = s \cdot \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

- Damit braucht man $\mathcal{F}(\Delta PQR)$ nur noch ausrechnen:

$$2\mathcal{F}(\Delta PQR) = \begin{vmatrix} \alpha_P A_x + \beta_P B_x + \gamma_P C_x & \alpha_Q A_x + \beta_Q B_x + \gamma_Q C_x & \alpha_R A_x + \beta_R B_x + \gamma_R C_x \\ \alpha_P A_y + \beta_P B_y + \gamma_P C_y & \alpha_Q A_y + \beta_Q B_y + \gamma_Q C_y & \alpha_R A_y + \beta_R B_y + \gamma_R C_y \\ \underbrace{\alpha_P + \beta_P + \gamma_P}_{1} & \alpha_Q + \beta_Q + \gamma_Q & \alpha_R + \beta_R + \gamma_R \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$= \alpha_P \cdot \begin{vmatrix} A_x & \ldots \text{s. eq. } (1) \ldots & \ldots \\ A_y & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & \ldots \end{vmatrix} + \beta_P \cdot \begin{vmatrix} B_x & \ldots & \ldots \\ B_y & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & \ldots \end{vmatrix} + \gamma_P \cdot \begin{vmatrix} C_x & \ldots & \ldots \\ C_y & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_P \cdot \left(\alpha_Q \underbrace{\begin{vmatrix} A_x & A_x & \ldots \\ A_y & A_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix}}_{0} + \beta_Q \begin{vmatrix} A_x & B_x & \ldots \\ A_y & B_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} + \gamma_Q \begin{vmatrix} A_x & C_x & \ldots \\ A_y & C_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} \right)$$

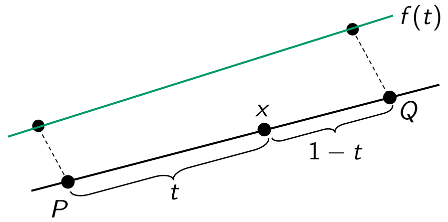
$$+ \beta_P \cdot \left(\alpha_Q \begin{vmatrix} B_x & A_x & \ldots \\ B_y & A_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} + \beta_Q \underbrace{\begin{vmatrix} B_x & B_x & \ldots \\ B_y & B_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix}}_{0} + \gamma_Q \begin{vmatrix} B_x & C_x & \ldots \\ B_y & C_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} \right)$$

$$+ \gamma_P \cdot \left(\alpha_Q \begin{vmatrix} C_x & A_x & \ldots \\ C_y & A_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} + \beta_Q \begin{vmatrix} C_x & B_x & \ldots \\ C_y & B_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix} + \gamma_Q \underbrace{\begin{vmatrix} C_x & C_x & \ldots \\ C_y & C_y & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots \end{vmatrix}}_{0} \right)$$

$$= \ldots$$

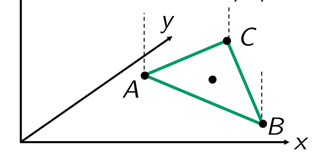
Erinnerung: lineare Interpolation

- Sei ein skalarer Wert f an P,Q vorgegeben: $f(P)=f_1$, $f(Q)=f_2$
- Dann kann man jedem Punkt *X* auf der Geraden $\overline{PQ}$ einen Wert f(*X*) zuordnen
- Sei *t* der Parameter von X, also $f(X) = (1-t) \cdot f(P) + t \cdot f(Q)$
- Dann setze $X = (1-t) \cdot P + t \cdot Q$



Anwendung: Baryzentrische Interpolation

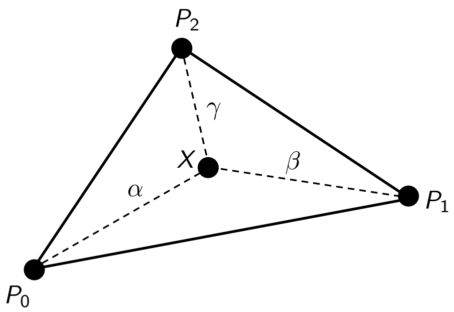
- Gegeben: „Höhen“ f_A, f_B, f_C an den Punkten A, B, C (oder irgendwelche anderen Werte)
- Gesucht: Funktion f, so daß f_A, f_B, f_C interpoliert werden



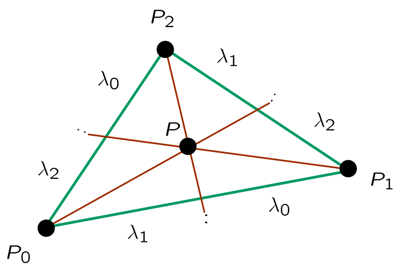
- Idee: bestimme baryzentrische Koordinaten eines beliebigen Punktes X, interpoliere damit die Funktionswerte
- Sei $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$
- Setze $f(X) = \alpha f_A + \beta f_B + \gamma f_C$
- Funktioniert auch für X außerhalb $\triangle ABC$
- Funktioniert auch für $f_A, f_B, f_C \in \mathbb{R}^m$
- Auf den Kanten entspricht dies gerade einer linearen Interpolation

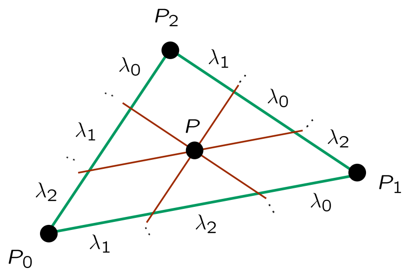
Weitere Anwendung: Punkt–in–Dreieck—Test

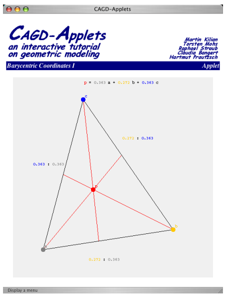
- Der Punkt X ist im Inneren des Dreiecks $\Leftrightarrow$ $\alpha, \beta, \gamma > 0$

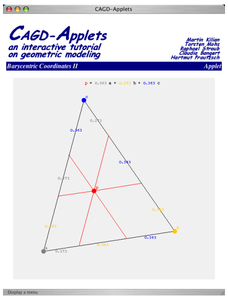


Geometrische Verhältnisse im Dreieck







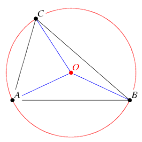


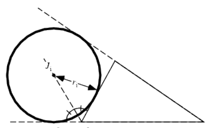
http://i33www.ibds.uni-karlsruhe.de/applets/

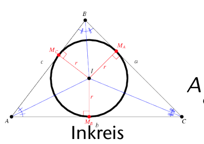
Spezielle Punkte im Dreieck

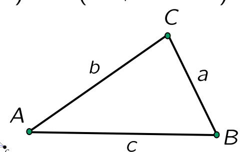
- Viele spezielle Punkte im Dreieck lassen sich mittels baryzentrischer Koordinaten sehr leicht angeben / ausrechnen (o. Bew.):

Punkt	α	β	γ
Schwerpkt.	1	1	1
Außenkreis zu A	$-a$	b	c
Inkreis	a	b	c
Umkreis	$a^2(b^2+c^2-a^2)$	$b^2(c^2+a^2-b^2)$	$c^2(a^2+b^2-c^2)$


Umkreis


Außenkreis


Inkreis



Bezeichnungen

- Achtung: die Koordinaten sind ohne Normierung angegeben (sog. "homogene baryzentrische Koord.") — die muß man also vor eine tatsächlichen Berechnung noch durchführen